

DER WÄRMEÜBERGANG BEI DER LAMINAR LÄNGS ANGESTRÖMTEN EBENEN PLATTE MIT DER WÄRMEFLUSSVERTEILUNG $q_w \sim x^m$ †

H. GRÄBER

EURATOM, z.Zt. C.E.N.-SACLAY (France), Service S.E.M.T.R.

(Eingegangen 23 September 1968)

Zusammenfassung—Mit Hilfe einer Ähnlichkeitsbetrachtung wird gezeigt, dass bei der längs angeströmten ebenen Platte ähnliche Temperaturprofile bzw. ortsunabhängige, mit der Temperaturgrenzschichtdicke gebildete Nusselt-Zahlen nur für die laminare Strömung und der dem Potenzgesetz $q_w \sim x^m$ gehorchenden Verteilung der Wärmestromdichte zu erwarten sind. Ein Näherungsverfahren gestattet, die Temperaturgrenzschichtdicke und damit die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante definierte Nusselt-Zahl zu berechnen. Die Ergebnisse werden mit den von Sparrow und Lin nach einem exakten Verfahren ermittelten Nusselt-Zahlen verglichen. Die Gleichungen zur Berechnung der wandnormalen Wärmestromdichteverteilung und der wandparallelen Komponente der Schubspannungsverteilung, die beide sowohl bei laminarer als auch bei turbulenter Strömung gelten, werden hergeleitet.

BEZEICHUNGEN

- a , Temperaturleitfähigkeit;
- c_p , Spezifische Wärme;
- $f(\eta)$, Blasius-Funktion;
- m , Exponent der Wärmeflussverteilung;
- Nu_0 , Nusselt-Zahl, gebildet mit der Temperaturgrenzschichtdicke δ_t , $\alpha\delta_t/\lambda$;
- Nu_x , dto., gebildet mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante, $\alpha x/\lambda$;
- Pr , Prandtl-Zahl, ν/a ;
- q , Wärmestromdichte;
- q_w , Wärmestromdichte an der Wand;
- Q , Wärmefluss;
- Re_x , Reynolds-Zahl, $u_\infty x/\nu$;
- u , Strömungsgeschwindigkeit in x -Richtung;
- u_∞ , Ungestörte Anströmungsgeschwindigkeit;
- v , Strömungsgeschwindigkeit in y -Richtung;

- W , Reibungswiderstand;
- x , Abstand von der Plattenvorderkante;
- x_b , Bezugslänge;
- y , Wandabstand.

Griechische Symbole

- α , Wärmeübergangszahl, $q_w/(\vartheta_w - \vartheta_\infty)$;
- δ , Dicke der Strömungsgrenzschicht;
- δ_t , Dicke der Temperaturgrenzschicht;
- η , Dimensionsloser Wandabstand, $\sqrt{[u_\infty/(x\nu)]} y$;
- n_δ, n_{δ_t} , η an der Stelle $y = \delta$ bzw. $y = \delta_t$;
- ϑ , Temperatur;
- ϑ_w , Wandtemperatur;
- ϑ_∞ , Anströmtemperatur;
- θ , Dimensionslose Temperatur, $(\vartheta - \vartheta_w)/(\vartheta_\infty - \vartheta_w)$;
- θ_x , dto., $(\vartheta - \vartheta_{wb})/(\vartheta_\infty - \vartheta_{wb})$;
- θ_{xw} , Dimensionslose Wandtemperatur, $(\vartheta_w - \vartheta_{wb})/(\vartheta_\infty - \vartheta_{wb})$;
- λ , Wärmeleitfähigkeit;
- μ , Dynamische Viskosität;
- ν , Kinematische Viskosität, μ/ρ ;
- ρ , Spezifische Masse;
- τ , Schubspannung;

† Die vorliegende Arbeit ist ein Auszug aus einem Teilabschnitt der französischen Fassung, welche von der Faculté des Sciences de l'Université de Paris zur Erlangung des Doctorat d'Etat ès Sciences genehmigt wurde.

τ_w , Wandschubspannung;
 φ , Dimensionslose Geschwindigkeit in
 x -Richtung, u/u_∞ .

Indices

b , Stelle $x = x_b \neq 0$;
 c , Stelle $y = \delta$;
 0 , Stelle $y = \delta_i$;
 w , Wand ($y = 0$);
 ∞ , Werte der ungestörten Anströmung.

1. EINLEITUNG

DIE VORLIEGENDE Arbeit ist eine Ergänzung zu der vom Verfasser [1] für den Fall von Kanalströmungen durchgeführten Untersuchung des Wärmeübergangs unter der Bedingung ortsunabhängiger Nusselt-Zahlen. Diese Bedingung ist bei laminarer und turbulenter Kanalströmung mit linearem Druckabfall für die exponentielle Wärmeflussdichteverteilung $q_w \sim \exp(mx)$ erfüllt.

Für den Fall der längs angeströmten ebenen Platte wird gezeigt, dass sich ortsunabhängige, mit der Temperaturgrenzschichtdicke δ_i gebildete Nusselt-Zahlen $Nu_0 = \alpha\delta_i/\lambda$ nur bei laminarer Strömung und der Wärmestromdichteverteilung $q_w \sim x^m$ ergeben. Dieses Ergebnis folgt aus der allgemeinen Form der Gleichung für den wandnormalen Wärmestromdichteverlauf $q/q_w(x, y)$, der für $Nu_0 \neq f(x)$ x -unabhängig sein muss. Von Sparrow und Lin [2] wurden für die Randbedingung $q_w \sim x^m$ die Nusselt-Zahlen $Nu_x = f(Pr, m)$ nach einem exakten Verfahren berechnet. Hierbei bedeutet $Nu_x = \alpha x/\lambda$ die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante gebildete Nusselt-Zahl. Die für $Pr = 0,7-1-10-100$ und $m = 0-1-2-4-6-10$ berechneten Ergebnisse lassen sich innerhalb einer Genauigkeit von 2 Prozent durch die Beziehung $Nu_x/(Re_x^{1/2}Pr^{1/4}) = C(1+m)^{1/4}$ wiedergeben. Der schwach von der Prandtl-Zahl abhängige Koeffizient C nimmt dabei Werte zwischen 0,45716 für $Pr = 0,7$ und 0,46363 für $Pr = 100$ an. Die in der vorliegenden Arbeit mit

Hilfe von Näherungsansätzen für die Geschwindigkeits- und für die Temperaturverteilung berechneten Nusselt-Zahlen Nu_x ergeben für den obengenannten Bereich der Prandtl-Zahlen Pr und des Exponenten m folgenden Zusammenhang: $Nu_x/(Re_x^{1/2}Pr^{1/4}) = 0,408(1+m)^{1/4}$.

Die Ergebnisse für den speziellen Fall konstanter Wandtemperatur werden im Bereich $Pr < 1$ mit den von Eckert [3] und Kutadzelatze [4] angegebenen Näherungslösungen verglichen.

Die wandnormale Schubspannungs- und Wärmestromdichteverteilung werden durch Anwendung des Impulssatzes bzw. der Wärmestromgleichung einerseits und durch Integration der Gleichungen für die Strömungs- bzw. Temperaturgrenzschicht andererseits berechnet. Diesen Herleitungen liegen zwei entsprechende Verfahren von Schlichting [5] zur Berechnung des Verlaufs der Wandschubspannung zugrunde. Sie stellen—neben der Ergänzung auf den Wärmeübergang—eine Erweiterung in dem Sinne dar, dass nicht nur die Schubspannungsverteilung längs der Wand $\tau_w(x)$ sondern auch die Verteilungen $\tau(y)$ und $q/q_w(y)$ innerhalb der Strömungs- bzw. Temperaturgrenzschicht bestimmt werden.

2. DER WANDNORMALE
SCHUBSPANNUNGSVERLAUF

2.1. Anwendung des Impulssatzes

In Abb. 1 ist ein Längsschnitt durch die Strömungs- und durch die Temperaturgrenzschicht dargestellt. Die Abschnitte OB und CB sind so gelegt, dass längs ihnen die Geschwindigkeit u bzw. die Temperatur ϑ jeweils konstant sind. Zu jedem beliebigen Punkt B innerhalb der beiden Grenzschichten lassen sich so immer zwei eindeutig bestimmte Kurven $u = \text{konst.}$ bzw. $\vartheta = \text{konst.}$ finden. Eine Ähnlichkeit der u - bzw. ϑ -Profile in Strömungsrichtung oder eine Proportionalität $\delta \sim \delta_i$ der Grenzschichtdicken δ für die Strömung und δ_i für die Temperatur ist nicht vorausgesetzt. Die Anwendung des Impulssatzes führt zu den in Tabelle 1 zusammengestellten Ergebnissen.

Der wandparallele Gesamtwiderstand W

längs der Fläche AOB ist gleich der Summe des Impulsflusses in x-Richtung (Breite 1)

$$W(x, y) = \rho \int_0^h u(u_\infty - u) dy + \rho \int_0^y u^2 dy - \rho u \int_0^y u dy. \quad (1)$$

Andererseits gilt für die wandparallele Schubspannung $\tau(x, y) = \partial W / \partial x$ und somit erhält man nach Einführen von $\varphi = u/u_\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho u_\infty^2} &= \int_0^h (1 - 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy + 2 \int_0^y \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \\ &- \varphi \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy = \int_0^h (1 - 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \\ &+ (1 - \varphi) \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} = \int_0^h (1 - 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \quad (3)$$

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \frac{\varphi \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - 2 \int_0^y \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy}{\int_0^h (1 - 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy} \quad (4)$$

$$\frac{d(\tau/\tau_w)}{dy} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(1 - \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \right)}{\int_0^h (1 - 2\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy} \quad (5)$$

2.2 Integration der Grenzschichtgleichung

Die Impulsgleichung in der für laminare und turbulente Strömung gültigen Form

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (6)$$

kann unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7a)$$

bzw.

$$v = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad (7b)$$

integriert werden:

$$\int_y^h \left[u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy - \frac{1}{\rho} \int_y^h \frac{\partial \tau}{\partial y} dy. \quad (8)$$

Das zweite Glied im Integranden auf der linken Seite dieser Gleichung lässt sich nach Anpassung der unteren Integrationsgrenzen durch partielle Integration umformen:

$$\begin{aligned} \int_y^h \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy &= \int_0^h \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy \\ &- \int_0^y \left[\frac{\partial u}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] dy = u_\infty \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x} dy \\ &- \int_0^h u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^y u \frac{\partial u}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (9)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (8) ergibt sich nach einer Umformung Gleichung (2).

Bei laminarer Strömung stehen zwei einfache Näherungslösungen für die Geschwindigkeitsverteilung φ zur Verfügung, die aus einem Reihenansatz für den mit der Grenzschichtdicke δ dimensionsbefreiten Wandabstand y bestehen:

$$\varphi^+ = 1,5 (y/\delta) - 0,5 (y/\delta)^3 \quad (10a)$$

$$\varphi^{++} = 2 (y/\delta) - 2 (y/\delta)^3 + (y/\delta)^4. \quad (10b)$$

Die Gleichung (10b) befriedigt zusätzlich zu den von den Gleichungen (10a) und (10b) erfüllten Bedingungen: $\varphi_w = 0$, $\varphi_c = 1$, $[d^2\varphi/(d(y/\delta))^2]_w = 0$ auch noch $[d^2\varphi/(d(y/\delta))^2]_c = 0$ und damit $[d\tau/d(y/\delta)]_c = 0$.

Beiden Gleichungen gemeinsam ist jedoch die ungenaue Wiedergabe der aus $\tau/\tau_w = [d\varphi/d(y/\delta)]/[d\varphi/d(y/\delta)]_w$ berechneten Schubspannungsverteilung. Für diese direkte Bestimmung von τ/τ_w sind die Gleichungen aber auch nicht gedacht. Die folgenden Ausführungen zeigen, dass sie zur Auswertung der Integralbeziehungen (2) bis (5) recht brauchbare Ansätze darstellen. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \frac{d(y/\delta)}{dx} = -\frac{\partial\varphi}{d(y/\delta)} \frac{1}{\delta} \frac{y}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \quad (11)$$

folgt aus Gleichung (4):

$$\frac{\tau}{\tau_w} = 1 - \frac{\varphi \int_0^{y/\delta} \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2 \int_0^{y/\delta} \varphi \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right)}{\int_0^1 (1 - 2\varphi) \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right)} \quad (12)$$

Werden die aus φ^+ und φ^{++} erhaltenen Größen, wie z.B. δ und τ , auf dieselbe Weise unterschieden wie die Geschwindigkeitsansätze, also δ^+ , δ^{++} , etc., so folgt nach Ausführung der einzelnen Integrationen:

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^+ = 1 - \frac{1}{26} \left(\frac{y}{\delta^+}\right)^3 \left[5 \left(\frac{y}{\delta^+}\right)^4 - 49 \left(\frac{y}{\delta^+}\right)^2 + 70 \right] \quad (13a)$$

$$\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^{++} = 1 - \frac{1}{74} \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^3 \left[56 \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^6 - 252 \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^5 + 270 \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^4 + 462 \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^3 - 882 \left(\frac{y}{\delta^{++}}\right)^2 + 420 \right] \quad (13b)$$

Mit den beiden Beziehungen für die Wandschubspannung

$$\tau_w = \rho u_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \int_0^1 (2\varphi - 1) \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \frac{y}{\delta} d\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (14a)$$

und

$$\tau_w = \frac{\mu u_\infty}{\delta} \left(\frac{d\varphi}{d(y/\delta)} \right)_w \quad (14b)$$

ist die Grenzschichtdicke definiert. Die Geschwindigkeitsgesetze in der Form $\varphi(y/\delta)$ ergeben unter der Bedingung, dass sich ihr Gültigkeitsbereich bis zur Plattenvorderkante erstreckt†:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{\eta_\delta}{\sqrt{Re_x}} \quad (15)$$

In Gleichung (15) bedeuten η_δ der dimensionslose Wandabstand

$$\eta = \sqrt{\left(\frac{u_\infty}{\nu}\right) y} \quad (16)$$

an der Stelle $y = \delta$ und Re_x die mit der Lauflänge x gebildete Reynolds-Zahl $Re_x = u_\infty x/\nu$.

Mit den beiden Näherungsansätzen φ^+ und φ^{++} erhält man $\eta_\delta^+ = \sqrt{(280/13)} = 4,64$ und $\eta_\delta^{++} = \sqrt{(1260/37)} = 5,83$.

Die exakte Rechnung ergibt, dass an der Stelle $\eta = \eta_\delta^{++} = 5,83$ die Schubspannung τ/τ_w auf 1 Prozent abgeklungen ist, für $\eta = \eta_\delta^+$ dagegen beträgt dieser Wert 8,4 Prozent und an der üblicherweise als Grenzschichtdicke definierten Stelle $\eta_\delta = 5$, an der die Geschwindigkeit 99 Prozent ihres Endwertes erreicht, hat die Schubspannung τ noch 4,8 Prozent ihres Maximalwertes τ_w .

Bei turbulenter Strömung—die kritische Reynolds-Zahl Re_x liegt bei ca. $3,2 \cdot 10^5$ —liefert das Potenzgesetz $\varphi = (y/\delta)^{1/n}$ für das Integral in Gleichung (14a) den Wert $n/[(1+n)(2+n)]$.

† Bei der Integration der Differentialgleichung für δ ist formal am Plattenbeginn ($x = 0$) $\delta = 0$ gesetzt, obwohl diese Stelle von der Betrachtung ausgeschlossen werden muss, da dort die Vereinfachungen, die zur Grenzschichtgleichung führten, nicht gelten.

Das Potenzgesetz gilt in grosser Wandnähe nicht, da es die laminare Unterschicht nicht berücksichtigt. Anstelle der Gleichung (14b) muss die Wandschubspannung τ_w durch Messungen bestimmt werden. Die von Blasius angegebene Beziehung $\tau_w = 0,0235 \rho u_\infty^2 (v/u_\infty \delta)^{\frac{1}{2}}$ ist bis zu Reynolds-Zahlen $Re_x = 10^7$ durch Versuche bestätigt. Damit ergibt sich die Grenzschichtdicke zu $(\delta/x)_{turb.} = 0,384/Re_x^{\frac{1}{2}}$, sie wächst also mit der Potenz $4/5$ des Abstandes x von der Plattenvorderkante an: $\delta_{turb.} \sim x^{\frac{4}{5}}$, während bei laminarer Strömung $\delta_{lam.} \sim x^{\frac{1}{2}}$ gilt.

Die Gleichung (12) führt unter Beibehaltung des Potenzgesetzes zu folgender Schubspannungsverteilung: $\tau/\tau_w = 1 - (y/\delta)^{1+2/n}$. Im Gegensatz zu den Ansätzen φ^+ und φ^{++} bei laminarer Strömung, die beide an der Stelle $y = \delta$ ohne Knick in $\varphi = 1$ übergehen, ergibt sich hier infolgeder Beziehung $[d\varphi/d(y/\delta)]_c = 1/n$ für den τ/τ_w -Verlauf eine unstetige Krümmung an der Stelle $y = \delta$: $[d(\tau/\tau_w)/d(y/\delta)]_c = -(1 + 2/n)$. Dagegen wird an der Wand die Bedingung $[d(\tau/\tau_w)/d(y/\delta)]_0 = 0$ richtig wiedergegeben.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind für die laminare Strömung in Abb. 2 dargestellt. Dabei sind die Funktionen $f(y/\delta)$ auf die einheitliche Koordinate $\eta = (y/\delta) \eta_\delta$ umgerechnet.

3. DER WANDNORMALE WÄRMESTROMDICHTEVERLAUF

Den beiden im vorangegangenen Abschnitt zur Herleitung der Schubspannungsverteilung τ/τ_w beschriebenen Verfahren entsprechen bei der Bestimmung des Wärmestrom dichte verlaufs q/q_w die Anwendung der Wärmestromgleichung sowie die Integration der Temperaturgrenzschichtgleichung.

3.1. Anwendung der Wärmestromgleichung

In Abb. 1 folgt die Kontrollfläche im Abschnitt CB der Linie $\vartheta = \text{konst.}^\dagger$ Die Teilbeiträge der durch die einzelnen Abschnitte hindurchströmenden Flüssigkeitsmengen sind für die Impuls- und für die Enthalpiebetrachtung dieselben, da den beiden Kontrollflächen die Eckpunkte A, A_1, B und B_1 gemeinsam sind (längs Ox_1 bzw. Cx_1 gilt $u = 0$). Die Addition der Spalte "Enthalpie" in Tabelle 1 ergibt den Wärmefluss

[†] Als Beispiel ist hier der Fall $q_w = \text{konst.}$ ($m = 1$) gewählt. Der aus den Gleichungen (24), (27) und (36b) folgende Temperaturverlauf $\vartheta = \vartheta_\infty - (\vartheta_\infty - \vartheta_w) (1 - \theta) (x/x_c)^{m+\frac{1}{2}}$ gestattet, den Ort konstanter Temperatur in der Flüssigkeit zu bestimmen. Für $d|\vartheta_\infty - \vartheta_w|/dx \leq 0$ ($m \leq -0,5$) beginnen alle Kurven $\vartheta = \text{konst.}$ an der Plattenvorderkante ($x_c = 0$), für $d|\vartheta_\infty - \vartheta_w|/dx > 0$ ($m > -0,5$) dagegen ist dies auf $\vartheta = \vartheta_\infty$ beschränkt, während der Ursprung der Kurven $\vartheta = \text{konst.} \neq \vartheta_\infty$ an der Stelle $x_c > 0$ liegt.

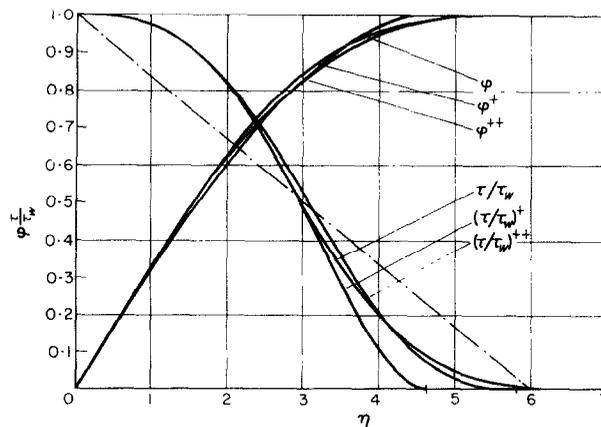


ABB. 2. Geschwindigkeits- und Schubspannungsverlauf $\varphi = f_1(\eta)$ bzw. $\tau/\tau_w = f_2(\eta)$ der laminaren Plattenströmung, einschliesslich ihrer Näherungslösungen $\varphi^+ = f_3(y/\delta)$, $\varphi^{++} = f_4(y/\delta)$ bzw. $(\tau/\tau_w)^+ = f_5(y/\delta)$ und $(\tau/\tau_w)^{++} = f_6(y/\delta)$.

für die Kontrollfläche als Differenz der ein- und austretenden Wärmemengen:

$$Q = \rho c_p \left[\int_0^h u(\vartheta_\infty - \vartheta) dy + \int_0^y u \vartheta dy - \vartheta \int_0^y u dy \right] + \int_0^x q_w dx. \quad (17)$$

Die wandnormale Wärmestromdichte q längs der Fläche $\vartheta = \text{konst.}$ ist $q = -\partial Q / \partial x$ und durch Differentiation der Gleichung (17) folgt mit $\varphi = u/u_\infty$:

$$\begin{aligned} \frac{q}{\rho c_p u_\infty} &= - \int_0^h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\vartheta_\infty - \vartheta) - \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right] dy \\ &\quad - \int_0^y \left(\varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dy + \vartheta \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \\ &= \int_y^h \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} (\vartheta_\infty - \vartheta) - \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right] dy \\ &\quad - (\vartheta - \vartheta_\infty) \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy. \end{aligned} \quad (18)$$

Mit der dimensionslosen Temperatur

$$\bar{\theta}_x(x, y) = \frac{\vartheta - \vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty - \vartheta_{wb}} \quad (19)$$

der aufgesetzte Strich dient zur Unterscheidung von der in Gleichung (25) definierten Temperatur θ_x , die von den dimensionslosen Koordinaten x/x_b und y/δ_t abhängt) erhält man:

$$\frac{q}{\rho c_p u_\infty (\vartheta_{wb} - \vartheta_\infty)} = \int_y^h \left[(1 - \bar{\theta}_x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \right] dy + (1 - \bar{\theta}_x) \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \quad (20)$$

sowie

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{\int_0^y \left[(1 - \bar{\theta}_x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \right] dy - (1 - \bar{\theta}_x) \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy}{\int_0^h \left[(1 - \bar{\theta}_x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \bar{\theta}_x}{\partial x} \right] dy} \quad (21)$$

Mit ϑ_{wb} ist dabei die Wandtemperatur ϑ_w an der beliebig wählbaren Stelle $x = x_b \neq 0$ bezeichnet.

Für $\bar{\theta}_x = \varphi$ besteht Identität zwischen q/q_w und τ/τ_w wie der Vergleich mit Gleichung (4) zeigt; dies setzt nach Gleichung (19) $\vartheta_w = \vartheta_{wb} = \text{konst.}$ voraus.

3.2. Integration der Temperaturgrenzschichtgleichung

Die aus der Energiegleichung abgeleitete Temperaturgrenzschichtgleichung

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q}{\partial y} \quad (22a)$$

ergibt bei Integration in den Grenzen y und h mit Gleichung (7b):

$$\int_y^h \left(u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) dy = \frac{q}{\rho c_p}. \quad (22b)$$

Die in Abschnitt 2.2. beschriebene Partialbruchzerlegung führt diese Gleichung in Gleichung (18) über.

4. DER WÄRMEÜBERGANG BEI UNVERÄNDERLICHER NUSSELT-ZAHL

Wie in [1] für allseits geschlossene zylindrische Begrenzung des Strömungsraumes, soll nun auch für den halbunendlichen Raum die Beschränkung auf diejenigen Fälle erfolgen, die

zu einer von der Lauflänge x unabhängigen mit Nusselt-Zahl führen.

Die erste Voraussetzung, welche dabei zu erfüllen ist, betrifft die Bildung der Nusselt-Zahl selbst: Als charakteristische Länge muss eine Grösse gewählt werden, die im wandnormalen Temperaturprofil reproduzierbar ist. Hierfür ist die Temperaturgrenschichtdicke δ_t geeignet, die sich bei Temperaturverteilungen der Form $\theta(y/\delta_t)$ aus vorgeschriebenen Randbedingungen und für $\theta(y)$ nach freier Wahl—etwa $y(\theta = 0,99)$ —ergeben. Die Definitionsgleichung für Nu_0 lautet also:

$$Nu_0 = \frac{\alpha \delta_t}{\lambda} = \frac{q_w}{\vartheta_w - \vartheta_\infty} \frac{\delta_t}{\lambda} \quad (23)$$

Für ortsunabhängige Nusselt-Zahlen $Nu_0 \neq f(x)$ gilt die Forderung, dass die Temperaturprofile $\vartheta(x, y)$ in Strömungsrichtung untereinander ähnlich sind. Dies bedeutet, dass die dimensionslose Temperaturverteilung

$$\theta\left(\frac{y}{\delta_t}\right) = \frac{\vartheta - \vartheta_w}{\vartheta_\infty - \vartheta_w} \quad (24)$$

x -unabhängig ist. Mit $q_w = -\lambda(\partial\vartheta/\partial y)_w$ folgt dann aus Gleichung (23) $Nu_0 = [\partial\vartheta/\partial(y/\delta_t)]_w/(\vartheta_\infty - \vartheta_w) = [d\theta/d(y/\delta_t)]_w = \text{konst.}$ Für die ortsabhängige Temperaturverteilung

$$\theta_x\left(\frac{x}{x_b}, \frac{y}{\delta_t}\right) = \frac{\vartheta - \vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty - \vartheta_{wb}} \quad (25)$$

erhält man unter Beachtung von $\theta_x(x/x_b = 0, y/\delta_t) \equiv \theta(y/\delta_t)$:

$$\theta_x\left(\frac{x}{x_b}, \frac{y}{\delta_t}\right) = c\theta + \theta_{xw} = (1 - \theta_{xw})\theta + \theta_{xw} \quad (26)$$

$$\theta_{xw}\left(\frac{x}{x_b}\right) = \frac{\vartheta_w - \vartheta_{wb}}{\vartheta_\infty - \vartheta_{wb}} \quad (27)$$

Der Proportionalitätsfaktor c ergibt sich aus $\theta_x = \theta_{x0} = 1$ und $\theta = 1$ für $y/\delta_t = 1$ zu $c = 1 - \theta_{xw}$. Wie Gleichung (23) überzeugt, gilt weiterhin man sich mit Hilfe der:

$$c = 1 - \theta_{xw} = \frac{q_w}{q_{wb}} \frac{\delta_t}{\delta_{tb}} \quad (28)$$

Der wandparallele Temperaturgradient $\partial\bar{\theta}_x/\partial x$ lässt sich durch partielle Differentiation der Gleichung (25) berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\theta}_x}{\partial x} &= \left[\frac{\partial\theta_x}{\partial(x/x_b)} + \frac{\partial\theta_x}{\partial(y/\delta_t)} \frac{\partial(y/\delta_t)}{\partial(x/x_b)} \right] \frac{1}{x_b} \\ &= \left[\frac{\partial\theta_x}{\partial(x/x_b)} - \frac{x_b}{\delta_t} \frac{y}{\delta_t} \frac{d\delta_t}{dx} \frac{\partial\theta_x}{\partial(y/\delta_t)} \right] \frac{1}{x_b} \end{aligned} \quad (29)$$

Für den hier vorliegenden Fall ähnlicher Temperaturprofile geht diese Gleichung mit Gleichung (26) über in

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{\theta}_x}{\partial x} &= \left[(1 - \theta) \frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} - \frac{x_b}{\delta_t} \frac{y}{\delta_t} \frac{d\delta_t}{dx} (1 - \theta_{xw}) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] \frac{1}{x_b} \end{aligned} \quad (30)$$

Ersetzt man in Gleichung (21) den Wandabstand y durch y/δ_t , so folgt mit Hilfe der Gleichungen (11), (26) und (30):

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{\int_0^{y/\delta_t} \{ \dots \} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) + (1 - \theta)(1 - \theta_{xw}) \frac{x_b}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \int_0^{y/\delta_t} \frac{y}{\delta} \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)}{\int_0^1 \{ \dots \} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)} \quad (31)$$

Der Inhalt der geschweiften Klammer in den beiden Integralen lautet:

$$\{ \dots \} = \left\{ (1 - \theta)(1 - \theta_{xw}) \frac{x_b y d\delta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \frac{d\varphi}{d(y/\delta)} + \varphi \left[(1 - \theta) \frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} - \frac{x_b y d\delta_t}{\delta_t \delta_t dx} (1 - \theta_{xw}) \times \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] \right\}$$

Die x -abhängigen Größen müssen aus dieser Gleichung durch Kürzung entfernt werden. Dies lässt sich unter folgenden Voraussetzungen durchführen:

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \text{konst.} \quad (32)$$

und

$$\frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} = -n \frac{x_b d\delta_t}{\delta_t dx} (1 - \theta_{xw}) \quad (33)$$

wobei n eine Konstante ist.

Die endgültige Form der Gleichung (31) lautet:

Die Wärmestromdichte an der Wand ergibt sich zu

$$q_w = \frac{\lambda Nu_0 (\vartheta_w - \vartheta_\infty)}{\delta_t} = \rho c_p u_\infty (\vartheta_w - \vartheta_\infty) \times \frac{d\delta_t}{dx} \int_0^1 \left\{ \varphi \left[n(1 - \theta) + \frac{y}{\delta_t} \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] - (1 - \theta) \frac{y}{\delta_t} \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d \left(\frac{y}{\delta_t} \right) \quad (35)$$

Die Integration der Gleichung (33) innerhalb der Grenzen $0 \dots \theta_{xw}$ und $\delta_{ib} \dots \delta_t$ liefert den für $Nu_0 = \text{konst.}$ vorgeschriebenen Temperaturverlauf der Wand $\theta_{xw} = 1 - (\delta_t/\delta_{ib})^n$.

Bei laminarer Strömung gilt $\delta \sim x^{\frac{1}{2}}$, die Gleichung (32) fordert denselben Zusammenhang auch für die thermische Grenzschichtdicke: $\delta_t \sim x^{\frac{1}{2}}$, damit wird der Temperaturverlauf der Wand $\theta_{xw} = 1 - (x/x_b)^{n/2}$. Die zugehörige Verteilung der Wärmestromdichte an der Wand ergibt sich aus Gleichung (28) zu $q_w/q_{wb} = (x/x_b)^{(n-1)/2}$.

$$\frac{q}{q_w} = 1 - \frac{Z}{\int_0^1 \left\{ \varphi \left[n(1 - \theta) + \frac{y}{\delta_t} \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] - (1 - \theta) \frac{y}{\delta_t} \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d \left(\frac{y}{\delta_t} \right)} \quad (34)$$

mit

$$Z = \int_0^{y/\delta_t} \left\{ \varphi \left[n(1 - \theta) + \frac{y}{\delta_t} \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] - (1 - \theta) \frac{y}{\delta_t} \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d \left(\frac{y}{\delta_t} \right)$$

Führt man, wie bei der Kanalströmung mit linearem Druckabfall, als Exponenten der Wärmeflussverteilung die Bezeichnung m ein, so folgen mit $m = (n - 1)/2$ die endgültigen Beziehungen für q_w/q_{wb} bzw. θ_{xw} :

$$\frac{q_w}{q_{wb}} = \left(\frac{x}{x_b} \right)^m \quad (36a)$$

und

$$\theta_{xw} = 1 - \left(\frac{x}{x_b} \right)^{m+\frac{1}{2}} \quad (36b)$$

Zur Berechnung der Wärmeübergangszahl α

$$+ (1 - \theta) \int_0^{y/\delta_t} \frac{y}{\delta_t} \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} d \left(\frac{y}{\delta_t} \right).$$

bzw. der Nusselt-Zahl $Nu_x = \alpha x / \lambda$ aus Nu_0 ist noch die Kenntnis der Temperaturgrenzschichtdicke δ_t notwendig. Aus Gleichung (35) kann diese durch Integration mit der Anfangsbedingung $x = 0, \delta_t = 0$ bestimmt werden (wie bei der Strömungsgrenzschicht gilt der so gewonnene Verlauf von δ_t im näheren Bereich der Plattenverderkante nicht). Unter Berücksichtigung von $Re_x Pr = \rho u_\infty c_p x / \lambda$ erhält man:

$$\frac{\delta_t}{x} = \sqrt{\left\{ \frac{2Nu_0}{Re_x Pr \int_0^1 \left\{ \varphi \left[n(1 - \theta) + \frac{y}{\delta_t} \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] - (1 - \theta) \frac{y}{\delta_t} \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right)} \right\}} \quad (37a)$$

Aus dieser Gleichung ist zu ersehen, dass bei Ähnlichkeit der Temperaturprofile stets $\delta_t \sim \sqrt{x}$ ist. Da andererseits $\delta_t/\delta = \text{konst.}$ vorausgesetzt wurde, erhält man von der Lauflänge x unabhängige Nusselt-Zahlen $Nu = \alpha \delta_t / \lambda$ nur bei laminarer Strömung, da bei turbulenter Strömung $\delta_t \sim x^{3/4}$ gilt. Das Verhältnis von hydraulischer zu thermischer Grenzschichtdicke lässt sich nun aus den Gleichungen (15) und (36) berechnen:

$$\frac{\delta}{\delta_t}(Pr, n) = \eta_\delta \sqrt{\left[\frac{Pr}{2Nu_0} \int_0^1 \left\{ \varphi \left[n(1 - \theta) + \frac{y}{\delta_t} \frac{d\theta}{d(y/\delta_t)} \right] - (1 - \theta) \left(\frac{y}{\delta_t}\right) \frac{d\varphi}{d(y/\delta_t)} \right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) \right]} \quad (37b)$$

Die mit dem Abstand x von der Plattenvorderkante gebildete örtliche Nusselt-Zahl Nu_x ist damit bekannt:

$$Nu_x = \frac{\sqrt{Re_x} \delta}{\eta_\delta \delta_t} Nu_0 \quad (38)$$

Als Näherungsansätze für den Temperaturverlauf stehen wiederum zwei Gleichungen zur Verfügung

$$\theta^+ = 1,5 \left(\frac{y}{\delta_t^+}\right) - 0,5 \left(\frac{y}{\delta_t^+}\right)^3 \quad (39a)$$

und

$$\theta^{++} = 2 \left(\frac{y}{\delta_t^{++}}\right) - 2 \left(\frac{y}{\delta_t^{++}}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta_t^{++}}\right)^4 \quad (39b)$$

die als Folge der gleichwertigen Randbedingungen den Näherungen für die Geschwindigkeitsverteilung φ^+ und φ^{++} entsprechen [s. Gleichungen (10a) bzw. (10b)].

Für die nun folgenden Berechnungen werden

die Ansätze φ^+ und θ^+ angewandt, da mit φ^{++} bzw. θ^{++} die Ergebnisse zu unhandlich ausfallen und durch die dabei erzielten Verbesserungen nicht gerechtfertigt werden.

Mit der durch die Gleichung (39a) festgelegten Temperaturgrenzschichtdicke δ_t^+ ergibt sich eine Nusselt-Zahl von $Nu_0^+ = [d\theta/d(y/\delta_t)]_w = 1,5$ während der Ansatz Gleichung (39b) mit $\delta_t^{++} > \delta_t^+$ zu $Nu_0^{++} = 2,0$ führt.

In der nun folgenden Berechnung der Funktion $\delta/\delta_t(Pr, m)$ mit Hilfe der Näherungen φ^+ und θ^+ müssen bei der Auswertung des in Gleichung (37b) enthaltenen Integrals die beiden Fälle $\delta/\delta_t \geq 1$ und $\delta/\delta_t \leq 1$ getrennt behandelt werden:

$$(a) \delta/\delta_t \geq 1 \left(Pr \geq \frac{1}{2(1+m)} \right)$$

Mit den Gleichungen (10a) und (39a) erhält man:

$$\int_0^1 \left\{ \dots \right\} d\left(\frac{y}{\delta_t}\right) = \frac{6}{280} (1+m) \frac{\delta_t}{\delta} \left[14 - \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2 \right] \quad (40)$$

Unter Berücksichtigung von $Nu_0^+/\eta_d^{+2} = 39/560$ ergibt sich nach Einsetzen der Gleichung (40) in Gleichung (37b) die Bestimmungsgleichung

für δ/δ_t :

$$Pr = \frac{13}{2(1+m) \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^3 \left[14 - \left(\frac{\delta_t}{\delta}\right)^2\right]} \quad (41)$$

Unter der Voraussetzung $(\delta_t/\delta)^2 \ll 14$ geht diese Beziehung über in

$$\left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^+ = \sqrt[3]{\frac{28}{13}(1+m)Pr} \cong \sqrt[3]{2(1+m)Pr} \quad (42)$$

Eine zweite Näherung, die dann auch den Bereich $2(1+m)Pr \rightarrow 1$ besser erfasst, erhält man durch Substitution des Gliedes $(\delta_t/\delta)^2$ in Gleichung (41) mit Hilfe der ersten Näherung (42). Die Nusselt-Zahl Nu_x^+ gem. Gleichung (38) ergibt sich in diesem Fall zu

$$Nu_x^+ = 0,324 \sqrt[2]{(Re_x)} \times \sqrt[3]{2(1+m)Pr \{14 - [2(1+m)Pr]^{-\frac{2}{3}}\}/13} \quad (43)$$

Die aus der exakten Lösung für konstante Wandtemperatur abgeleitete Näherung $Nu_x = 0,332 \sqrt[2]{(Re_x)} \sqrt[3]{(Pr)}$ wird durch vorstehende Gleichung für $m = -\frac{1}{2}$ und bei Vernachlässigung des Gliedes $[2(1+m)Pr]^{-\frac{2}{3}}$ wiedergegeben. Die Prandtl-Zahl, für die sich der Verlauf der thermischen und hydraulischen Grenzschichtdicke deckt, kann aus Gleichung (42) ermittelt werden: $Pr(\delta = \delta_t) = 0,5/(1+m)$.

Hieraus erkennt man, dass für $Pr = 1$ die Grenzschichtdicken für Temperatur und Geschwindigkeit nur dann übereinstimmen, wenn $m = -\frac{1}{2}$, d.h. $\vartheta_w = \text{konst.}$ ist (vorausgesetzt natürlich, dass δ und δ_t in derselben Weise definiert sind).

$$(b) \delta/\delta_t \leq 1 \left(Pr \leq \frac{1}{2(1+m)} \right).$$

Hier muss bei der Integration innerhalb der Grenzen $y/\delta_t = 0$ und $y/\delta_t = 1$ berücksichtigt werden, dass für $y/\delta_t \geq \delta/\delta_t$ die Geschwindigkeit $\varphi = 1$ ist. Die Bestimmungsgleichung für δ/δ_t lautet hier:

$$Pr = \frac{13 \left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^2}{2(1+m) \left[35 - 35 \left(\frac{\delta}{\delta_t}\right) + 14 \left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^2 - \left(\frac{\delta}{\delta_t}\right)^4 \right]} \quad (44)$$

Führt man wiederum für das Glied $(\delta/\delta_t)^4$ welches nur bei Werten $2(1+m)Pr$ nahe eins von Bedeutung ist, die dort gültige Näherung (42) ein, so lässt sich das Verhältnis der Grenzschichtdicken δ/δ_t explizit angeben. Die daraus berechenbare Nusselt-Zahl

$$Nu_x^+ = \frac{0,405 \sqrt{(Re_x)}}{13/[28(1+m)Pr]} \times \left(\sqrt[3]{1 + \frac{8}{5} \left\{ 1 - \frac{[2(1+m)Pr]^{\frac{2}{3}}}{35} \right\}} \right) \times \left[\frac{13}{28(1+m)Pr} - 1 \right] - 1 \quad (45a)$$

stimmt für $m = -0,5$ sehr gut mit der von Eckert [3] durch Integration der Grenzschichtgleichung und Anwendung auf den Fall $\vartheta_w = \text{konst.}, Pr < 0, \varphi = \varphi^+$ und $\theta = \theta^+$ hergeleiteten Beziehung

$$(Nu_x^+)_E = \frac{\sqrt{(Pr Re_x)}}{1,55 \sqrt{(Pr)} + 3,09 \sqrt{(0,372 - 0,15 Pr)}} \quad (45b)$$

überein, ohne dass die beiden Gleichungen jedoch identisch sind. Die durch dasselbe Verfahren wie Eckert von Kutateladze [4] für $\vartheta_w = \text{konst.}, Pr < 0, \varphi = \varphi^{++}$ sowie $\theta = \theta^{++}$ aufgestellte Formel

$$(Nu_x^{++})_K = 0,55 \sqrt{[(1 - Pr^{\frac{2}{3}}) Pr Re_x]} \quad (45c)$$

ist mit den beiden vorstehend erwähnten Gleichungen für kleine Prandtl-Zahlen ($Pr < 0,1$) ebenfalls in guter Übereinstimmung, während mit Annäherung an $Pr = 1$ die bei der Herleitung vernachlässigten Glieder zweiter und höherer Ordnung von δ/δ_t zu Abweichungen führen. Für $(1+m)Pr > 4$ kann in Gleichung (43)

das Glied $[2(1 + m) Pr]^{-\frac{1}{2}}$, und für $(1 + m) Pr < 0,4$ in Gleichung (45a) das Glied $[2(1 + m) Pr]^{\frac{1}{2}}$ entfallen.

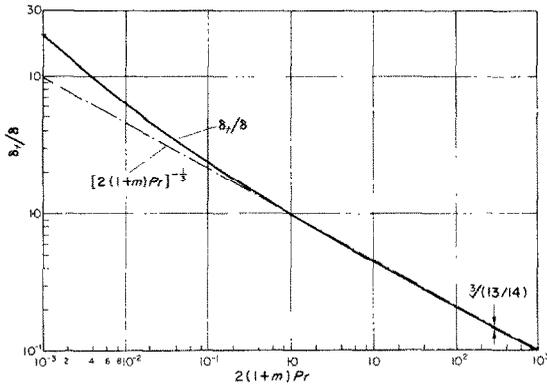


ABB. 3. Verhältnis aus der Temperatur- und der Strömungsgrenzschichtdicke $\delta_i/\delta = f(2(1 + m) Pr)$ für die laminare Plattenströmung.

In Abb. 3 ist der Verlauf der Kurve δ_i/δ gemäss den Gleichungen (41) und (44) in Abhängigkeit von $2(1 + m) Pr$ dargestellt. Die dabei zum Vergleich in das Gebiet $2(1 + m) Pr < 1$ verlängert Gerade $[2(1 + m) Pr]^{-\frac{1}{2}}$ macht die Abweichungen von der für $2(1 + m) Pr > 1$ zulässigen Näherung deutlich.

Die für $m = -0,5$ ($\vartheta_w = \text{konst.}$) aus den Gleichungen (41), (44) und (38) berechneten Nusselt-Zahlen Nu_x^+ sind in Tabelle 2 den von Pohlhausen (neuerdings für $Pr < 0,6$ ergänzt, s. [4]) nach dem exakten Verfahren ermittelten Werten in der Form $Nu_x/(Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}})$ gegenübergestellt. Die Übereinstimmung erweist sich als recht befriedigend, wobei allerdings—bedingt

durch eine leichte Streuung der unter (a) aufgeführten Wertepaare—die gegenseitigen Abweichungen etwas unregelmässig über den Bereich der Prandtl-Zahlen verteilt sind. Für Temperatur- und Wärmestromdichteverteilungen der in Gleichung (36b) bzw. (36a) angegebenen Form wurden bereits von Sparrow und

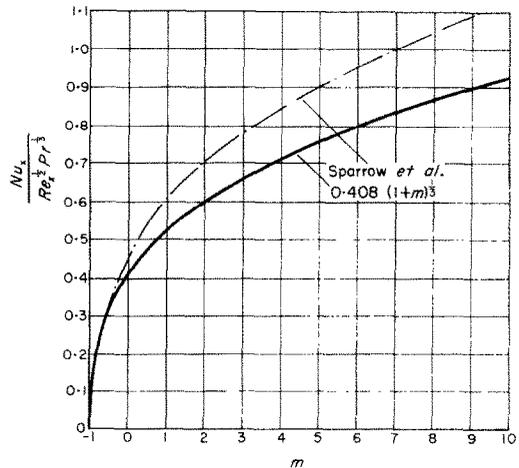


ABB. 4. Vergleich der aus dem Näherungsverfahren ermittelten Beziehung $Nu_x/(Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}) = 0,408(1 + m)^{\frac{3}{2}}$ mit der aus den exakten Ergebnissen von Sparrow and Lin [2] gewonnenen Näherungsgleichung $Nu_x/(Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}) = 0,459(1 + m)^{\frac{3}{2}}$ für die laminare Plattenströmung.

Lin [2] und von Sugawara und Sato [6] exakte Lösungen ermittelt. In Abb. 4 ist die von Sparrow/Lin für $0,7 \leq Pr \leq 100$ und $0 \leq m \leq 10$ angegebene Näherungsgleichung

$$Nu_x/(Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}) = 0,459(1 + m)^{\frac{3}{2}}$$

mit der aus den Gleichungen (38) und (42) für

Tabelle 2. Vergleich der für die ebene Platte bei laminarer Strömung und konstanter Wandtemperatur berechneten Nusselt-Zahlen Nu_x : (a) Exakte Werte (b) Werte nach Gleichung (38) mit δ_i/δ , gemäss den Näherung Gleichung (41) bzw. (42)

Pr	0,003	0,005	0,01	0,1	0,7	1,0	75	15	50	100	500	1000
(a)												
$\frac{Nu_x}{Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}$	0,193	0,225	0,241	0,287	0,329	0,332	0,337	0,339	0,339	0,338	0,335	0,337
(b)												
$\frac{Nu_x}{Re_x^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}}}$	0,193	0,208	0,228	0,291	0,321	0,323	0,329	0,330	0,331	0,331	0,331	0,331

$Pr \geq 0,5/(1 + m)$ folgenden Ergebnis:

$$\frac{Nu_x}{Re_x^{1/2} Pr^{1/4}} = 0,408(1 + m)^{1/4} \quad (46)$$

verglichen.

Wie man sieht, geht mit zunehmender Abkehr von der Randbedingung $\vartheta_w = \text{konst.}$ auch der Genauigkeitsgrad der Näherung Nu_x^+ zurück. Dies ist verständlich, da das zugrundegelegte Temperaturprofil θ^+ lediglich gewisse Voraussetzungen an der Wand sowie an der Stelle $y = \delta_t$ befriedigt, im Innern der thermischen Grenzschicht erfolgt eine Anpassung jedoch nicht. Daher kann auch z.B. das Völligerwerden des θ -Profils mit ansteigendem m , bedingt durch die Verlagerung des konvektiven Wärmetransports in wandnähere Schichten, nicht zum Ausdruck kommen. Dass die beste Übereinstimmung zwischen der Näherungsrechnung und der exakten Lösung in der Nähe von $m = -0,5$, d.h. für $\vartheta_w = \text{konst.}$ besteht, hängt mit der Sonderstellung zusammen, die der Fall mit konstanter Wandtemperatur bei der laminar längs angeströmten ebenen Platte einnimmt: Identität der Geschwindigkeitsverteilung φ mit der Temperaturverteilung θ . Um dieses Verhalten näher zu erläutern, bedarf es einiger zusätzlicher Betrachtungen über die Randbedingungen des Temperaturprofils an der Wand.

Die Grenzschichtgleichung des Temperaturfeldes

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \quad (47)$$

liefert zusammen mit den Haftbedingungen $u = v = 0$ und $\vartheta = \vartheta_w$ für $y = 0$ die zweite Ableitung des Temperaturprofils an der Wand $(\partial^2 \vartheta / \partial y^2)_w = 0$. Für die dritte Ableitung an der Wand folgt nach Differentiation der Gleichung (47) unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung (7a) und der zuvor genannten Haftbedingungen:

$$\left(\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial y^3}\right)_w = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w \frac{d \vartheta_w}{dx} \quad (48)$$

Durch Umgruppierung und Einführung der

Reynolds- und Prandtl-Zahl sowie mit Hilfe der Gleichung (36b) geht diese Gleichung über in

$$\left(\frac{d^3 \theta}{[d(y/\delta_t)]^3}\right)_w = - (0,5 + m) Re_x Pr \left(\frac{\delta_t}{x}\right)^2 \times \frac{\delta_t}{\delta} \left(\frac{d\varphi}{d(y/\delta)}\right)_w \quad (49)$$

Die thermische Grenzschichtdicke δ_t/x lässt sich aus Gleichung (37a) bestimmen. Führt man diese Berechnung wiederum mit den Näherungsansätzen (10a) und (39a) durch, so erhält man für $Pr \geq 0,5/(1 + m)$ mit der Gleichung (40) (unter Vernachlässigung des Gliedes $(\delta_t/\delta)^2$ gegenüber dem Zahlenwert 14):

$$[d^3 \theta / (d(y/\delta_t)^3)]_w^+ = -7,5(1 + 2m)/(1 + m).$$

Es zeigt sich nun, dass die Beziehung (49)—die also zusätzlich zu erfüllen ist, um eine Anpassung an den Wärmefluss längs der Wand zu erfassen—im Fall der angenäherten Temperaturverteilung θ^+ nur von dem Wert $m = -\frac{3}{8}$ befriedigt wird. Dieser Wert liegt jedoch andererseits verhältnismässig nahe dem exakten Wert $m = -0,5$, sodass die Abweichung von $[d^3 \theta^+ / [d(y/\delta_t)]^3]_w = -3$ gegenüber dem vorgeschriebenen Wert null noch nicht sehr ins Gewicht fällt.

Für andere Näherungsansätze als die hier gewählten, φ^+ und θ^+ , bleibt die Proportionalität

$$[d^3 \theta / [d(y/\delta_t)]^3]_w \sim [(1 + 2m)/(1 + m)] \times [d\varphi/d(y/\delta)]_w$$

erhalten, solange nur Identität zwischen den Gleichungen $\varphi(y/\delta)$ und $\theta(y/\delta_t)$ besteht. Mit zunehmender Güte der Näherung $\varphi(y/\delta) \equiv \theta(y/\delta_t)$ rückt lediglich der Wert m aus Gleichung (49) gegen $-0,5$, während für $m \neq -0,5$ zur Erfüllung der Gleichung (49) Temperaturprofile $\theta(y/\delta_t) \neq \varphi(y/\delta)$ vorgeschrieben sind. Letztere hängen dann ausser von m auch noch leicht von der Prandtl-Zahl ab.

Die dritte Ableitung des Temperaturprofils an der Wand nimmt für $m > -0,5$ positive und für $m < -0,5$ negative Werte an. Zusammen mit der bei ebenen Wänden stets gültigen Beziehung $(\partial^2 \vartheta / \partial y^2)_w = 0$ geht daraus weiterhin hervor, dass die Temperaturverteilungen für Wärmefluss- bzw. Wandtemperaturverteilungen mit $m < -0,5$ einen Wendepunkt im Strömungsinnen aufweisen. Man findet also bei der längs angeströmten ebenen Platte das auch bei parallelen Platten vorliegende Ergebnis wieder, dass die Randbedingung $\vartheta_w = \text{konst.}$ die Fälle mit Wendepunkt von denen ohne Wendepunkt im Temperaturprofil trennt. Ein grundsätzlicher Unterschied bleibt jedoch bestehen: Die Lage des Wendepunktes $y/\delta_t = (y/\delta_t)_n$ gibt bei der laminar angeströmten ebenen Platte nicht den Ort unveränderlicher Temperatur $y = (y/\delta_t)_n \delta_t$ an, wie dies bei der laminaren Strömung zwischen parallelen Platten der Fall ist.

Für abnehmende Exponenten $m < -0,5$ rückt der Wendepunkt $d^2\theta/[d(y/\delta_t)]^2 = 0$ mehr und mehr in das Strömungsinne, der Temperaturgradient $d\theta/d(y/\delta_t)$ an der Wand nimmt dabei zunehmend kleinere Werte an, um bei einem bestimmten unteren Grenzwert m_g —für die hier angegebene Näherung bei $m_g = -1$, für die exakte Lösung etwas oberhalb dieses Wertes und schwach von der Prandtl-Zahl abhängig—ganz zu verschwinden. In diesem Fall geht der Wärmeaustausch an der Wand gegen null, wie aus Gleichung (43) bereits hervorging, und das Temperaturprofil verliert physikalisch seinen Sinn. Denn im Gegensatz zu der Kanalströmung mit linearem Druckgradienten gibt die so erhaltene Temperaturverteilung mit zwei horizontalen Tangenten nicht mehr die Vorgänge beim Temperatureausgleich längs einer wärmeundurchlässigen Wand nach vorausgegangenem Wärmeaustausch wieder. Der Grund hierfür liegt darin, dass die nach Gleichung (32) geforderte Proportionalität $\delta_t \sim \delta$ nicht mehr besteht. Damit sind aber auch die für noch kleinere Werte von m zu erwartenden negativen Temperaturgradienten $d\theta/d(y/\delta_t)$ an der Wand nicht mehr realisierbar. Temperaturprofile solcher

Art, die innerhalb des Strömungsquerschnitts ein Optimum $\partial\vartheta/\partial y = 0$ aufweisen, kommen zwar bei Richtungsumkehr des Wärmeaustausches vor, sie sind jedoch nicht ähnlich.

Zu den beiden Gleichungen (43) und (45) lassen sich noch einige Bemerkungen anschließen. Im Fall $2(1+m)Pr \gg 1$ vollzieht sich der Wärmeaustausch vornehmlich in dem Gebiet, in welchem die Geschwindigkeit linear mit dem Wandabstand y/δ ansteigt. Wiederholt man die unter (a) beschriebenen Berechnungen dementsprechend mit $\varphi_a^+ = 1,5(y/\delta_t)/(\delta/\delta_t)$, so erhält man die Lösung Gleichung (43), d.h. $Nu_x^+ \sim Pr^{\frac{1}{2}}$. Die Vernachlässigung von $(\delta_t/\delta)^2$ in Gleichung (41), die zu Gleichung (43) führte, entspricht also der Beschränkung auf das Geschwindigkeitsprofil φ_a^+ . Ist dagegen $2(1+m)Pr \ll 1$, so findet der überwiegende Teil der Wärmeübertragung ausserhalb der hydrodynamischen Grenzschicht statt. Wiederholt man die unter (b) durchgeführten Berechnungen mit $\varphi_b = 1$ innerhalb der gesamten thermischen Grenzschicht, so folgt daraus $Nu_x^+ = 1,5\sqrt{[(1+m)PrRe_x]}$, d.h. $Nu_x^+ \sim Pr^{\frac{1}{2}}$. Dieser Zusammenhang ist auch aus Gleichung (45) für genügend kleine Werte von $2(1+m)Pr$ ersichtlich.

Zum Abschluss soll noch die Differentialgleichung für die Temperaturverteilung in der Form $\theta(\eta, m, Pr)$ hergeleitet werden. Die Grenzschichtgleichung (47) geht für die dimensionlose Temperatur $\theta_x(x/x_b, \eta) = (\vartheta - \vartheta_{wb})/(\vartheta_\infty - \vartheta_{wb})$ über in:

$$\frac{u}{x_b} \frac{\partial \theta_x}{\partial(x/x_b)} + v \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial \eta^2} \left(\frac{d\eta}{dy} \right)^2 \quad (50)$$

Der Differentialquotient $d\eta/dy$ lässt sich aus Gleichung (16) berechnen, für die Geschwindigkeiten u und v werden die bekannten Beziehungen $u = u_\infty df/d\eta$ und $v = 0,5\sqrt{(vu_\infty/x)} (\eta df/d\eta - f)$ eingesetzt, wobei die Funktion $f(\eta)$ in Tabellen vorliegt (erstmal berechnet von Blasius [7]). Für die Temperaturprofile θ_x wird wiederum Ähnlichkeit vorausgesetzt. Die

Gleichungen (16) und (26) ergeben :

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial(x/x_b)} = (1 - \theta) \frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} - (1 - \theta_{xw}) \frac{\eta}{2(x/x_b)} \frac{d\theta}{d\eta} \quad (51)$$

sowie

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} = (1 - \theta_{xw}) \frac{d\theta}{d\eta} \quad (52)$$

Die Umformung der Gleichung (50) kann nun vorgenommen werden, was zu folgendem Ergebnis führt :

$$\frac{df}{d\eta} \left[\frac{1 - \theta}{1 - \theta_{xw}} \frac{x}{x_b} \frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} - \frac{\eta}{2} \frac{d\theta}{d\eta} \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{df}{d\eta} - f \right) \frac{d\theta}{d\eta} = \frac{1}{Pr} \frac{d^2 \theta}{d\eta^2} \quad (53)$$

Die Temperatur θ ist nach der getroffenen Voraussetzung unabhängig von x , folglich muss

$$\frac{x/x_b}{1 - \theta_{xw}} \frac{d\theta_{xw}}{d(x/x_b)} = \text{konst.} = -n/2 = -(0,5 + m) \quad (54)$$

sein. Die Integration dieser Gleichung ergibt den bereits durch Gleichung (37) vorgeschriebenen Temperaturverlauf der Wand, und damit lautet die Differentialgleichung für die Temperatur $\theta(\eta, m, Pr)$:

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + \frac{Pr}{2} \left[f \frac{d\theta}{d\eta} + (1 + 2m)(1 - \theta) \frac{df}{d\eta} \right] = 0. \quad (55)$$

Durch das zusätzliche Glied $Pr(0,5 + m)(1 - \theta) df/d\eta$ lässt sich der Temperaturverlauf nicht mehr explizit in der Form $\theta(\eta, m, Pr)$ darstellen, wie dies für die Randbedingung $\vartheta_w = \text{konst.}$ der Fall ist [8] :

$$\theta = \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{Pr}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta} \quad (56)$$

Die Geschwindigkeit φ gehorcht der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} + \frac{1}{2} f \frac{d\varphi}{d\eta} = 0. \quad (57)$$

Daher sind für $Pr = 1$ und $m = -0,5$, d.h. $\vartheta_w = \text{konst.}$, die Differentialgleichungen (55) und (57) für θ und φ identisch, und aus den gemeinsamen Randbedingungen $f = \varphi = \theta = 0$ für $\eta = 0$ und $\varphi = \theta = 1$ für $\eta = \infty$ folgt die Übereinstimmung der φ - und θ -Profile. Dass diese Identität jedoch nur in dem Fall der laminaren Plattenströmung bei $Pr = 1$ und $\vartheta_w = \text{konst.}$ besteht, wird in der Literatur nicht immer genügend hervorgehoben.

LITERATURVERZEICHNIS

1. H. GRÄBER, Der Wärmeübergang in glatten Rohren, zwischen parallelen Platten, in Ringspalten und längs Rohrbündeln bei exponentieller Wärmeflussverteilung in erzwungener laminarer oder turbulenter Strömung, *Int. J. Heat Mass Transfer*, in Vorbereitung.
2. E. M. SPARROW and S. H. LIN, Boundary layers with prescribed heat flux, application to simultaneous convection and radiation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **8**, 437-448 (1965).
3. E. ECKERT, *Wärme- und Stoffaustausch*, 2. Auflage, S.98, Springer-Verlag, Berlin (1959).
4. S. S. KUTADELATZE, *Fundamentals of Heat Transfer*, 2nd Edn, p. 232. Edward Arnold, London (1963).
5. H. SCHLICHTING, *Grenzschichttheorie*, 5. Auflage, S.135/157, Verlag G. Braun, Karlsruhe (1965).
6. S. SUGAWARA and T. SATO, Heat transfer on the surface of a flat plate in the forced flow, *Memorial of the Faculty of Engineering, Kyoto University* **14**, 21-37 (1952).
7. H. BLASIUS, Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Z. Math. Phys.* **56**, 4-13 (1908).
8. E. POHLHAUSEN, Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reihung und Wärmeleitung, *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 115-121 (1921).

Abstract—Using similarity considerations it is shown that in parallel flow along a flat plate similar temperature profiles, respectively locally independent Nusselt-numbers based on thermal boundary layer thickness can only be expected for laminar flow and distribution of heat flux obeying the power law $q_w \sim x^m$. Using approximations the thermal boundary layer thickness and thus the Nusselt-number defined with the distance x from the leading edge of the plate can be determined. Results are compared with Nusselt-numbers obtained by an exact procedure developed by Sparrow and Lin. Equations are deduced predicting the distributions of heat flux normal and shear stress parallel to the wall valid for both laminar and turbulent flow.

L'ECHAUFFEMENT PAR UN ECOULEMENT LE LONG D'UNE PLAQUE PLANE
AVEC LA DISTRIBUTION DE FLUX DE CHALEUR $q_w \sim x^m$

Résumé—On a montré, à l'aide de la théorie de la similitude, que, le long d'une plaque plane dans le lit du vent, on ne doit s'attendre à un profil de température semblable c'est-à-dire indépendant de l'emplacement, avec les nombres de Nusselt rapportés à l'épaisseur de la couche limite thermique, que pour l'écoulement laminaire et une distribution de la densité de flux de chaleur obéissant à une loi en puissance $q_w \sim x^m$. Un processus d'approximation permet de calculer l'épaisseur de la couche limite thermique et, à partir de cela, le nombre de Nusselt défini avec la distance x du bord d'attaque de la plaque. Les résultats sont comparés avec ceux trouvés par le procédé exact de Sparrow et Lin du calcul des nombres de Nusselt. Les équations pour le calcul des distributions de la densité de flux de chaleur normale à la paroi et de la composante parallèle à la paroi de la contrainte tangentielle sont déduites aussi bien pour l'écoulement laminaire que pour l'écoulement turbulent.

Аннотация—Из соображений подобия показано, что в параллельном потоке вдоль плоской пластины для случая ламинарного потока и распределения теплового потока, подчиняющегося степенному закону $Q_w x^m$, можно ожидать только автомодельные температурные профили, которые локально не зависят от числа Нуссельта, полученного из определения толщины теплового пограничного слоя. Используя приближение, определяющее толщину теплового пограничного слоя, можно определить число Нуссельта как функцию расстояния x от передней кромки пластины. Результаты сравниваются с числами Нуссельта, полученными с помощью точного метода, разработанного Спарроу и Лином. Получены уравнения для плотности теплового потока, а также нормальных касательных напряжений, справедливых для ламинарного и турбулентного потоков.